任意温度下 Coulomb 气体内高斯震荡的中偏差

本科毕业论文答辩

答辩人：杨润哲

数学与统计学院

指导老师：高付清教授

什么是 Coulomb 气体？

在物理学中，Coulomb 气体，也称为“单分量等离子体”，是在静电力作用下相互作用的带电粒子的多体系统，它是统计力学中非常常见的在微观上不同但在宏观上相同的系统，在数学物理的文献中受到了广泛关注。

在本文中，我们将研究逆温度 β 下的 d 维 Coulomb 气体（其中 $d \geq 2$），它由 Gibbs 测度所刻画：

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(X_N) = \frac{1}{Z^V_{N,\beta}} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{d}-1} H_N(X_N)\right) dX_N$$

其中 $X_N = (x_1, \ldots, x_N)$ 是每一个分量在 $\mathbb{R}^d$ 中的 N 元组，$H_N(X_N) := \sum_{1\leq i\neq j\leq N} \mathrm{g}(x_i - x_j) + N\sum_{i=1}^N V(x_i)$ 是系统在状态 X_N 中的能量，g 是 green 函数。

为什么要引入新的运输方法？

其中的正规化常数称作配分函数，定义为

$$Z_{N,\beta}^{V} := \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{d}-1}\mathcal{H}_N(X_N)\right) dX_N$$

给定定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数 ξ，通常我们使用基于 [Joh98] 中的 Johansson 方法对震荡函数 $\mathrm{Fluct}(\xi)$ 进行控制，定义为

$$\mathrm{Fluct}(\xi) := \sum_{i=1}^{N} \xi(x_i) - N\int \xi d\mu_\theta(x) \qquad (1)$$

其中 $\theta = \beta N^{\frac{2}{d}}$

该方法的核心在于计算 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(e^{-\beta t N^{\frac{2}{d}}\sum_{i=1}^{N}\xi(x_i)}\right)$，简化到计算配分函数比值 $\frac{Z_{N,\beta}^{V_t}}{Z_{N,\beta}^{V}}$（势场 $V_t := V + t\xi$）

为什么要引入运输方法？

而注意到

$$\frac{Z_{N,\beta}^{V_t}}{Z_{N,\beta}^{V}} = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathrm{d}}}(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\mu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta))\right)\frac{\mathsf{K}_N(\mu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}$$

其中 μ_θ 与 μ_θ^t 分别是势场为 V 和 V_t 的 Coulomb 气体的热平衡测度，而

$$\mathcal{E}^V(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathsf{g}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x)d\mu(x)$$

我们发现如果使用这种方法，估计 $\frac{\mathsf{K}_N(\mu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}$ 这一项是复杂的。因此引入了新的运输方法，即在 2018 年 T. Leblé 和 S.Serfaty 于 [LS17] 中使用的方法 — 用形式为 $(\mathrm{Id}+t\psi)\#\mu_\theta$ 的逼近 $\tilde{\mu}_\theta^t$ 来代替 μ_θ^t（# 表示与概率测度的复合）。

1 研究背景

2 主要结果

3 研究方法

4 参考文献

基本假设

定义算子：$L = \frac{1}{c_d \mu_\theta} \Delta$

下面我们假设：$\xi \in C^4$，$\operatorname{supp} \xi \subset Q_\ell \subset \hat{\Sigma}$，$\hat{\Sigma}$ 是在 $\operatorname{supp} \mu_\infty$ 中的某个子集，ℓ 满足：$|\xi|_{C^k} \le C\ell^{-k}$，$\forall k \le 4$ 的固定常数

记 V 是 $\mathbb{R}^d$ 上的实值函数，下面假设 $V \in C^7$, 满足:

当 $d \ge 3$ 时:

$$\int_{|x|\ge 1} \exp\left(-\frac{\theta}{2} V(x)\right) dx < \infty \tag{2}$$

$$V \to +\infty \text{ 当 } |x| \to \infty \tag{3}$$

当 $d = 2$ 时:

$$\int_{|x|\ge 1} e^{-\frac{\theta}{2}(V(x)-\log|x|)}\, dx + \int_{|x|\ge 1} e^{-\theta(V(x)-\log|x|)} |x| \log^2 |x|\, dx < \infty \tag{4}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty} (V + \mathrm{g}) = +\infty \tag{5}$$

二维情况

定理

记 $\theta=\beta N$，设实数列 (τ_N) 满足：当 $N\to\infty$ 时，$\frac{\tau_N}{N^{\frac{7}{8}}}\to 0$ 和 $\tau_N\to\infty$，对任意固定的逆温度 β，有：

$\exp\left(-\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau\beta\ell^2(\mathrm{Fluct}(\xi)-m(\xi))\right)\right)$
$=\exp(O\left(\tau_N^4 N^{-4}\right))(N\to\infty)$

在 $|\tau|\leq\tau_N$ 上一致成立，其中

$$v(\xi)=\frac{3}{2c_2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2+\frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^2}\mu_\theta\,|L(\xi)|^2 \tag{6}$$

$$m(\xi)=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Delta\xi}{c_2}\right)\log\mu_\theta \tag{7}$$

二维下的大偏差

因此，我们可以应用 [DZ09] 中的 Gärtner–Ellis 定理来获得高斯震荡的大偏差原理：

推论

$\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}\mathrm{Fluct}(\xi)$ 按 τ_N^2 的速度满足大偏差原则，其速率函数为 $J(x)=\frac{x^2}{r(\xi)}$，其中

$$r(\xi) := \ell^4\beta\frac{3}{2c_2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2$$

RMK: 在 [LLW19] 中，作者使用更一般的 Fourier 级数方法给出了一维情况下 β-cluster 的线性统计量的正态渐近速度，但其方法的缺陷是无法导出像上面定理中的指数渐近估计。

二维下的正态渐近速度

推论

设 ϕ_N 是 $\mathrm{Fluct}(\xi) - m(\xi) := \sum_{i=1}^N \xi(x_i) - N\int \xi d\mu_\theta(x)$ 的特征函数，而 ϕ 是正态分布 $N(0, \frac{3}{c_2\beta}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2)$ 的特征函数，则对 $\mathbb{R}$ 中的任意一个紧致集 K，我们有：

$$\sup_{x\in K}|\phi_N(x) - \phi(x)| = O\left(N^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{3}{4}} N\right)$$

RMK：当维数 $d > 2$ 时，此时若想要高斯震荡收敛到正态分布，需要另一种极限的趋向方式，见 [Ser23] 中推论 2.4。

高维情况：d > 2

定理

记 $\theta = \beta N^{\frac{2}{d}}$，设数列 (τ_N) 满足：当 $N\to\infty$ 时，$\frac{\tau_N}{N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}}\to 0$ 和 $\frac{\tau_N}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}}\to\infty$，则对任意固定的逆温度 β 有：

$$\exp\left(-\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau N^{\frac{1}{d}-\frac{1}{2}}\beta\ell^2(\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))\right)\right)$$
$$=\exp(O\left(\tau_N N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}\right))$$

在 $|\tau|\le\tau_N$ 上一致成立，其中

$$v(\xi)=\frac{3}{2c_d}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2+\frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^d}\mu_\theta\,|L(\xi)|^2 \tag{8}$$

$$m(\xi)=\left(1-\frac{2}{d}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\Delta\xi}{c_d}\right)\left(f_{\mathrm{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})+\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}}f_{\mathrm{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})\right) \tag{9}$$

高维情况下的大偏差

推论

$\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}(\mathrm{Fluct}(\xi) - N^{1-\frac{2}{d}} m(\xi))$ 按 τ_N^2 的速度满足大偏差原则，其速率函数为 $J(x) = \frac{x^2}{r(\xi)}$，其中

$$m(\xi) = \left(1 - \frac{2}{d}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\Delta\xi}{c_d}\right)\left(f_{\mathrm{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}}) + \beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}} f_{\mathrm{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})\right)$$

$$r(\xi) := \ell^4\beta\frac{3}{2c_d}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2$$

其他文献中的结果

定理（G. Lambert, M. Ledoux, C. Webb, 2019)

设 $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足一定的正则性条件，如果 $f\in C_c^{\kappa+4}(\mathbb{R})$，$\gamma_1$ 满足一维正态分布，$(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ 满足一维 $\beta-$ *ensemble* 的分布

$$\mathcal{X}_N(f):=\sqrt{\frac{\beta}{2\Sigma(f)}}\left(\sum_{j=1}^{N} f\left(\lambda_j\right)-N\int_{\mathrm{J}} f(x)\mu_V(dx)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{m}(f)\right) \tag{10}$$

其中 $\mathrm{J}=[-1,1]$，则我们有：

$$\mathrm{W}_2\left(\mathcal{X}_N(f),\gamma_1\right)\ll_f N^{-\theta+\varepsilon}$$

其中是 W_2 是 *Wasserstein-2* 距离，$\theta=\min\left\{\frac{2\kappa-9}{2\kappa+11},\frac{2}{3}\right\}$。

其他文献中的结果

定理 (F. Gao, J. Mu, 2022)

记 $\mathbb{P}_{N,\beta}^{V;[b_-,b_+]}$ 是区间 $[b_-, b_+]$ 上一维 $\beta-ensemble$ 的概率测度，设正数列 (r_N) 满足：当 $N\to\infty$ 时，$r_N\to\infty$ 和 $r_N/N\to 0$。若函数 V 满足一定的条件时，则我们有：

$$\exp\{-\frac{t^2}{2}v(g)\}\mathbb{E}_{N,\beta}^{V}\left(\exp\left\{t\left(M_N(g)-N\int g(\xi)\mu_V(d\xi)-m(g)\right)\right\}\right)$$

$$=\exp\left\{O\left(\frac{r_N^3}{N}\right)\right\}(11)$$

在 $t\in[-r_N, r_N]$ 上一致的成立，其中 $M_N(g):=\sum_{j=1}^{N}g(\lambda_j)$，而 $\mathbb{E}_{N,\beta}^{V}$ 是 $\mathbb{P}_{N,\beta}^{V;[b_-,b_+]}$ 的期望。

简要思路

1. 运输函数选择：根据定义，μ_θ^t 是势场 $V_t = V + t\xi$ 的热平衡测度，并且满足

$$g * \mu_\theta^t + V_t + \frac{1}{\theta} \log \mu_\theta^t = C_{\theta,t} \tag{12}$$

对关于 t 变量进行线性化（一阶展开），注意热平衡测度 μ_θ 也满足类似的等式，将两式相减，得知我们应该选择满足下列等式的函数 ψ：

$$-g * (div(\psi\mu_\theta)) + \xi - \frac{1}{\theta\mu_\theta} div(\psi\mu_\theta) = 0 \tag{13}$$

我们可以解出：

$$\psi = -\frac{\nabla h}{c_d \mu_\theta}$$

其中 h 满足等式：

$$-\frac{\Delta h}{c_d \theta \mu_\theta} + h = \xi$$

简要思路

2. 运输测度选择：由于 ψ 无法在 $\operatorname{supp}\xi$ 上局部化（见 [Ser23]），并且很难得到一个精细的有界性估计，我们通过同时选择两种运输测度来克服这个困难。
第一个是直接用 ψ 运输 μ_θ，即

$$\tilde{\mu}_\theta^t := (\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta \tag{14}$$

第二个是

$$\nu_\theta^t := \mu_\theta + \frac{t}{\mathsf{c_d}}\Delta\xi \tag{15}$$

注意 ν_θ^t 是 $\tilde{\mu}_\theta^t$ 的一个很好的逼近（展开 $\tilde{\mu}_\theta^t$）。

简要思路

3. 误差估计：我们可以将高斯震荡的拉普拉斯变换拆成四个部分，注意到：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(e^{-t\beta N^{\frac{2}{d}}\sum_{i=1}^N \xi(x_i)}\right) = e^{-\beta N^{1+N^{\frac{2}{d}}}\left(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)-\mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta)\right)}\frac{\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}$$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}-N\nu_\theta^t\right)\right)\right) \quad (16)$$

其中 $\mathsf{K}_N(\mu)$ 是配分函数（$\mathsf{Q}_N(\mu)$ 是他的伴随测度），定义为：

$$\mathsf{K}_N(\mu)=\int_{(\mathbb{R}^d)^N}\exp\left(-\beta N^{\frac{2}{d}-1}\mathsf{F}_N(X_N,\mu)\right)d\mu^{\otimes \mathrm{n}}(X_{\mathrm{n}}) \qquad (17)$$

而

$$\varepsilon_t := \mathsf{g}*\nu_\theta^t+V+t\xi+\frac{1}{\theta}\log\nu_\theta^t-C_\theta \qquad (18)$$

简要思路

我们可以用上式将被运输后的项和原项逼近后的误差分为四个部分：

$$\left|\log \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(-t\beta N^{\frac{2}{d}}\mathrm{Fluct}(\xi)\right)\right)-t^2N^{1+\frac{2}{d}}\beta v(\xi)+tN\beta m(\xi)\right|$$

$\leq \sum_{i=1}^{4}|\mathrm{Error}_i|$

其中

$$v(\xi)=\frac{3}{2c_d}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2+\frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^d}\mu_\theta|L(\xi)|^2$$

$$m(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Delta\xi}{c_2}\right)\log\mu_\theta \\ \text{当 } d=2 \\ \left(1-\frac{2}{d}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\Delta\xi}{c_d}\right)\left(f_{\mathrm{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})+\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}}f_{\mathrm{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})\right) \\ \text{当 } d\geq 3\end{cases}$$

而四个部分的误差：

$$|\mathrm{Error}_1| = \beta N^{1+\frac{2}{d}} |\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta) - t \int_{\mathbb{R}^d} \xi d\mu_\theta - t^2 v(\xi)|$$

$$|\mathrm{Error}_2| = \left|\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)} \left(\exp\left(-\theta \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon_t \, d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right)\right)\right)\right|$$

$$|\mathrm{Error}_3| = |\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} + tN\beta m(\xi)|$$

$$|\mathrm{Error}_4| = |\log \frac{\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}|$$

下面我们可以用不同的引理来估计。

简要思路

引理 (第一项误差)

$$\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta) - t\int_{\mathbb{R}^d} \xi d\mu_\theta = -t^2 v(\xi) + O\left(\frac{t^3}{\theta}\int_{\mathbb{R}^d} \mu_\theta |L(\xi)|^3\right)$$

证明.

直接计算 $\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta)$，利用 μ_θ 满足等式：

$$g * \mu_\theta + V + \frac{1}{\theta}\log \mu_\theta = C_\theta$$

然后对得到等式中的 log 函数进行 Taylor 展开，最后利用 ν_θ^t 的定义可以得到结果。 □

简要思路

接下来的引理来自 [Ser23] 中的引理 5.4。

引理 (第二项误差)

$$\left|\log \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}-N\nu_\theta^t\right)\right)\right)\right|$$

$$\leq C\sqrt{\chi(\beta)}\beta N^{1+\frac{1}{d}}\ell^d\left|\varepsilon_t\right|_{C^1}+C\theta N\ell^d\left|\varepsilon_t\right|_{C^1}^2$$

简要思路

引理 (第三项误差)

如果 $d=2$, 我们有

$$\log\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = tN\frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^d} div(\psi\mu_\theta)\log\mu_\theta + O\left(t\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)\right.$$

如果 $d\geq 3$，我们有

$$\log\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = tN\left(1-\frac{2}{d}\right)\int_{\mathbb{R}^d} div(\psi\mu_\theta)\left(f_{\mathsf{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})+\right.$$

$$\left.\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}}f_{\mathsf{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{d}})+O\left(t\beta N\ell^{\mathsf{d}}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)D_N(\psi)^{-1}\right)+o(1)\right)$$

简要思路

证明.

和 [Ser23] 中引理 7.2 思路一致。直接计算 $\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}$ 再进行展开，利用论文中的引理 2.3.4 与 2.3.5（局部法则）。 □

引理 (第四项误差)

如果 $V \in C^7$, 则我们有

$$|\log \mathsf{K}_N(\nu_\theta^t) - \log \mathsf{K}_N(\tilde{\mu}_\theta^t)|$$

$$\leq C\beta\chi(\beta)N\ell^d t^2 \left(\left(|\xi|_{\mathcal{C}^1} + |\xi|_{\mathcal{C}^3}\right) + |\xi|_{\mathcal{C}^1}|\xi|_{\mathcal{C}^3} + \ell(|\xi|_{\mathcal{C}^1}|\xi|_{\mathcal{C}^2} + |\xi|_{\mathcal{C}^1}|\xi|_{\mathcal{C}^4} + |\xi|_{\mathcal{C}^2}|\xi|_{\mathcal{C}^2}\right)$$

证明.

在 [Ser23] 中的式子 (7.6.2) 令 q=0 即得。 □

简要思路

4.t 的选择：我们选择 $t=-\tau N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{d}}\ell^2$, 其中 $|\tau|\le\tau_N$，τ_N 的阶数由不同的维数确定。这样取是为了保证在最后得到的高斯震荡的 Laplace 估计

$$\exp\left(-\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau N^{\frac{1}{d}-\frac{1}{2}}\beta\ell^2\{\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi)\}\right)\right)$$

中 $\mathrm{Fluct}(\xi)$ 前面的系数不会包含 N 的负次幂因而趋向无穷小，同时又使 t 满足引理所需的条件。
5. 大偏差推论：运用 [DZ09] 中的定理 2.3.6 即可计算出速率函数。

[AS19a] Scott Armstrong and Sylvia Serfaty.
Local laws and rigidity for coulomb gases at any temperature.
The Annals of Probability, (1), 2019.

[AS19b] Scott Armstrong and Sylvia Serfaty.
Thermal approximation of the equilibrium measure and obstacle problem.
Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques, (4), 2019.

[CSA20] Gabriel Cardoso, Jean-Marie Stéphan, and Alexander G Abanov.
The boundary density profile of a coulomb droplet. freezing at the edge.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54(1):015002, dec 2020.

[DZ09] Amir Dembo and Ofer Zeitouni.
Large Deviations Techniques and Applications.
Springer Berlin, Heidelberg, 2009.

[GM22] Fuqing Gao and Jianyong Mu.
Moderate deviations for linear eigenvalue statistics of β-ensembles.
Random Matrices: Theory and Applications, 11(2):2250017, 2022.

[Joh98] K. Johansson.
On fluctuations of eigenvalues of random hermitian matrices.
Duke Math. J., 91(1):151–204, 1998.

[LLW19] Gaultier Lambert, Michel Ledoux, and Christian Webb.
Quantitative normal approximation of linear statistics of -ensembles.
The Annals of Probability, 47(5):pp. 2619–2685, 2019.

[LS17] Thomas Leblé and Sylvia Serfaty.
Large deviation principle for empirical fields of log and riesz gases.
Inventiones mathematicae, 210:645–757, 2017.

[LS18] Thomas Leblé and Sylvia Serfaty.
Fluctuations of two dimensional coulomb gases.
Geometric and Functional Analysis, 28:443–508, 2018.

[Ser15] Sylvia Serfaty.
Coulomb gases and ginzburg-landau vortices, 2015.

[Ser23] Sylvia Serfaty.
Gaussian fluctuations and free energy expansion for coulomb gases at any temperature.
Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 59(2):1074 – 1142, 2023.

感谢您的观看!