学　　号　2020302011020

密　　级

武汉大学本科毕业论文

任意温度下 Coulomb 气体内高斯震荡的中偏差

院 (系) 名 称：　数学与统计学院

专 业 名 称：　统计学

学 生 姓 名：　杨润哲

指 导 教 师：　高付清　教授

二〇二三年十二月

BACHELOR'S DEGREE THESIS
OF WUHAN UNIVERSITY

Moderate Deviation for Gaussian Fluctuations of Coulomb Gases at Any Temperature

School (Department): School of Mathematics and Statistics
Major: Statistics
Candidate: Runzhe Yang
Supervisor: Prof. Fuqing Gao

Wuhan University

December, 2023

郑 重 声 明

本人呈交的学位论文, 是在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果, 所有数据、图片资料真实可靠。尽我所知, 除文中已经注明引用的内容外, 本学位论文的研究成果不包含他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体, 均已在文中以明确的方式标明。本学位论文的知识产权归属于培养单位。

本人签名: ________________ 日期: ________________

1 摘　要

在本论文中，我介绍并总结了 [11] 中使用的运输方法。然后，我利用这种方法建立了 d 维 Coulomb 气体（其中 $d \geq 2$）内高斯震荡的中偏差原理。主要的思路是计算原本关于高斯震荡的拉普拉斯变换和运输测度之后的拉普拉斯变换之商所产生误差余项的阶数，并应用 [1] 中的 Gärtner–Ellis 定理来获得高斯震荡的中偏差原理。同时，我也给出了二维情况下，高斯震荡的正态逼近速度。

关键词: Coulomb 气体; 运输方法; 高斯震荡; 中偏差

2 ABSTRACT

In this thesis, I introduce and summarize the transport-based method used in [11]. Then I make use of it to establish the moderate deviation principle for Gaussian fluctuation of d-dimensional Coulomb gases with $\mathsf{d} \geq 2$. The main ingredient is to calculate the order of error terms stemmed from the difference between original term and the transported term, and apply the Gärtner–Ellis theorem in [1] to obtain the moderate deviation of the Gaussian fluctuation. Meanwhile, I also give the speed of normal approximation of Gaussian fluctuation when dimension $\mathsf{d} = 2$.

Key words: Coulomb Gas; Transport-based Method; Gaussian Fluctuations; Moderate Deviation

目　　录

3　介绍

3.1　问题背景

在物理学中，Coulomb 气体，也称为“单分量等离子体”，是统计力学中标准的在微观上不同但在宏观上相同的系统，在数学物理的文献中受到了广泛关注。

在本文中，我们将研究逆温度 β 下的 d 维 Coulomb 气体（其中 $\mathsf{d} \geq 2$），它由 Gibbs 测度所刻画：

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(X_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^V} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1} \mathcal{H}_N(X_N)\right) dX_N \tag{3.1.1}$$

其中 $X_N = (x_1, \ldots, x_N)$ 是每一个分量在 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 中的 N 元组，$\mathcal{H}_N(X_N)$ 是系统在状态 X_N 中的能量，定义为

$$\mathcal{H}_N(X_N) := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \mathsf{g}(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^{N} V(x_i) \tag{3.1.2}$$

其中

$$\mathsf{g}(x) := \begin{cases} -\log|x| & \text{当 } \mathsf{d} = 2 \\ |x|^{2-\mathsf{d}} & \text{当 } \mathsf{d} \geq 3 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

在这篇文章中，我们用 $\mathsf{c_d}$ 表示满足 $-\Delta \mathsf{g} = \mathsf{c_d} \delta_0$ 的在维度 d 中成立的常数。因此，能量 $\mathcal{H}_N(X_N)$ 是所有粒子之间的排斥 Coulomb 相互作用的总和，再加上外部场或约束势 NV 对每个粒子的影响，其强度与 N 成比例。在定义(3.1.1)中的标准化常数 $Z_{N,\beta}^V$ 称为配分函数，定义为

$$Z_{N,\beta}^V := \int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1} \mathcal{H}_N(X_N)\right) dX_N \tag{3.1.4}$$

我们通过在逆温度的测量中选择 $\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}$ 而不是 β，从而选取了特定的测量单位。正如在 [8] 中所看到的，这实际上是通过缩放考虑的比较自然的选择，因为我们的 β 对应于调控微观尺度行为的有效逆温度，具有能量和熵在局部层次上相互平衡的竞争。

在 Coulomb 气体系统中，如果 β 固定，并且 V 在无穷远处增长得足够快，那么当 $N \to \infty$ 时，在 Gibbs 测度下，经验测度

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}$$

几乎处处收敛到一个具有紧支撑并且在其支撑上密度等于 $\mathsf{c}_\mathsf{d}^{-1}\Delta V$ 的确定平衡测度 μ_∞，这也可以被刻画为：在所有概率测度中使得等式

$$\mathcal{E}^V(\mu) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}\times\mathbb{R}^\mathsf{d}} \mathsf{g}(x-y)d\mu(x)d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} V(x)d\mu(x) \tag{3.1.5}$$

最小化的唯一解，参见 [10, 第二章]。

根据 [3]，我们不使用 μ_∞，而是使用与平衡测度有关的特定修正，我们称之为热平衡测度，它适用于所有温度，并定义为：最小化等式

$$\mathcal{E}_\theta^V(\mu) := \mathcal{E}^V(\mu) + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \mu\log\mu \tag{3.1.6}$$

的概率测度 μ_θ，其中

$$\theta := \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}} \tag{3.1.7}$$

并且，最小化等式(3.1.6)的热平衡测度同时也满足：

$$\mathsf{g} * \mu_\theta + V + \frac{1}{\theta}\log\mu_\theta = C_\theta \quad \text{在 } \mathbb{R}^\mathsf{d}\text{中} \tag{3.1.8}$$

其中 C_θ 是与 θ 有关的常数。

在此，以及在接下来的内容中，我们对测度 μ 及其密度函数使用相同的符号。与 μ_∞ 不同，μ_θ 在整个 $\mathbb{R}^\mathsf{d}$ 中是非负的并且是正则的，同时具有指数衰减的尾部。

在 [2] 中作者已经研究了 μ_θ 相对于 θ 的精确依赖关系，当 $\theta \to \infty$ 时，μ_θ 会收敛到 μ_∞，同时作者也给出了精确的估计。使用热平衡测度使我们能够获得在整个 β 和 N 范围内更精确的定量结果，特别是在小 β 的情况下。

在本文中，我们关注在每个固定的逆温度 β 下，线性统计量 $\mathrm{Fluct}(\xi)$ 的偏差偏差原理，其中 $\mathrm{Fluct}(\xi)$ 定义为：

$$\mathrm{Fluct}(\xi) := \sum_{i=1}^{N}\xi(x_i) - N\int \xi d\mu_\theta(x) \tag{3.1.9}$$

我们要求其中的 ξ 足够正则。

3.2 定义与假设

在整篇文章中，我们将使用 C 表示一个共同的正常数，与其他参数无关，但在不同的地方可能并不相同。我们使用符号 $|f|_{C^\sigma}$ 表示阶为 σ 的 Hölder 半范数，其中 $\sigma \geq 0$（不一定是整数）。例如 $|f|_{C^0} = \|f\|_{L^\infty}$, $|f|_{C^k} = \|D^k f\|_{L^\infty}$ ，如果对于某个整数 k，$\sigma \in (k, k+1)$，我们定义

$$|f|_{C^\sigma(\Omega)} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|}{|x-y|^{\sigma-k}}$$

我们假设

$$V \in C^7 \tag{3.2.1}$$

$$\begin{cases} V \to +\infty \text{ as } |x| \to \infty & 当\ \mathsf{d} \geq 3 \\ \liminf_{|x|\to\infty} V + \mathsf{g} = +\infty & 当\ \mathsf{d} = 2 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{|x|\geq 1} \exp\left(-\frac{\theta}{2} V(x)\right) dx < \infty, & 当\ \mathsf{d} \geq 3 \\ \displaystyle\int_{|x|\geq 1} e^{-\frac{\theta}{2}(V(x)-\log|x|)}\, dx + \int_{|x|\geq 1} e^{-\theta(V(x)-\log|x|)} |x| \log^2|x|\, dx < \infty & 当\ \mathsf{d} = 2 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

这些假设确保了标准平衡测度 μ_∞ 和热平衡测度 μ_θ 的存在（参见 [2]）。我们回忆一下，平衡测度被刻画为：存在一个常数 c，使得 $\mathsf{g} * \mu_\infty + V - c$ 在 μ_∞ 的支撑上为 0，在其他地方非负。我们设 $\Sigma := \mathrm{supp}\mu_\infty$，并假设非退化条件

$$\Delta V \geq \alpha > 0 \quad 在\Sigma的邻域内成立 \tag{3.2.4}$$

以及

$$\mathsf{g} * \mu_\infty + V - c \geq \alpha \min(\mathrm{dist}^2(x, \Sigma), 1)$$

注意，(3.2.1)和(3.2.2)意味着 V 下界有限。

在整篇文章中，我们将使用和 [3] 一样的记号：

$$\chi(\beta) = \begin{cases} 1 & 当\ \mathsf{d} \geq 3 \\ 1 + \max(-\log\beta, 0) & 当\ \mathsf{d} = 2 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

并强调除非 $\mathsf{d}=2$ 且 β 很小，否则 $\chi(\beta)=1$。修正因子 $\chi(\beta)$ 在二维情况下 β 很小时出现，这反映了泊松点过程被期望具有无限的 Coulomb 相互作用能量（见 [3] 中的讨论）。

在 [3] 中作者引入了最小尺度 ρ_β，其定义为

$$\rho_\beta = C\max\left(1, \beta^{-\frac{1}{2}}\chi(\beta)^{\frac{1}{2}}, \beta^{\frac{1}{\mathsf{d}-2}-1}\mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 5}\right) \tag{3.2.6}$$

对于某个特定的 $C>0$,其中 χ 如上定义。他们认为 ρ_β 实际上应该只是 $\max(1,\beta^{-\frac{1}{2}}\chi(\beta)^{\frac{1}{2}})$，(3.2.6)中的第三项仅出于技术原因。请注意，这个长度尺度是在膨胀坐标中测量的，因此在原始坐标中“刚性”的最小长度尺度是 $N^{-1/\mathsf{d}}\rho_\beta$。忽略维数 d 为 2 时的对数修正，这个尺度大概是 $N^{-1/\mathsf{d}}\max(1,\beta^{-1/2})$，即 $\max(N^{-1/\mathsf{d}},\theta^{-1/2})$。

在 [3] 中，作者证明了无论 μ_θ 在 Σ 中是否有下界，都在距离 $\geq d_0$ 的地方有控制中尺度盒中的能量的局部法则，其中 d_0 由以下定义

$$d_0 := C\max\left(\left(\frac{N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}}{\max(1,\beta^{-\frac{1}{2}}\chi(\beta)^{\frac{1}{2}})}\right)^{-\frac{2}{3}}, N^{\frac{1}{\mathsf{d}+2}-\frac{1}{\mathsf{d}}}\right) \tag{3.2.7}$$

对于适当的 $C>0$。我们不期望这样的局部定律在边界上成立，因为在那里气体具有高振荡的特性，参见 [4]。

因此，这让我们定义 Σ 的子集 $\hat{\Sigma}$:

$$\hat{\Sigma} := \{x\in\Sigma, \mathrm{dist}(x,\partial\Sigma)\geq d_0\} \tag{3.2.8}$$

同时，对于任意 $\theta\geq\theta_0$，我们还有

$$\forall\sigma\leq 3,\quad |\mu_\theta|_{C^\sigma(\hat{\Sigma})}\leq C \tag{3.2.9}$$

在整个文章中，我们需要假设测试函数在一个边长为 ℓ 的立方体中有支撑，其中

$$\rho_\beta N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}} < \ell \leq C \tag{3.2.10}$$

即大于或等于“刚性”的最小长度尺度。ℓ 将会被选取成满足特定条件的固定常数。同时，我们将用 Q_ℓ 表示边长在 $[\ell,2\ell]$ 中的超矩形，它不一定以原点为中心。

我们定义另一个配分函数:

$$\mathsf{K}_N(U,\mu) := \int_{U^{\mathsf{n}}} e^{-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(X_{\mathsf{n}},\mu,U)}\, d\mu^{\otimes\mathsf{n}}(X_{\mathsf{n}}) \tag{3.2.11}$$

并让

$$\mathsf{Q}_N(U,\mu)=\frac{1}{\mathsf{K}_N(U,\mu)}e^{-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(X_{\mathrm{n}},\mu,U)}d\mu^{\otimes\mathrm{n}}(X_{\mathrm{n}}) \tag{3.2.12}$$

作为相关的 Gibbs 测度。如果 U 是 $(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，我们简记

$$\mathsf{K}_N(\mu)=\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N}\exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(X_N,\mu)\right)d\mu^{\otimes\mathrm{n}}(X_{\mathrm{n}}) \tag{3.2.13}$$

和 $\mathsf{Q}_N(\mu)$ 作为相关的 Gibbs 测度。我们会将被运输的函数放入其中，并估计它们的值。

在 [3] 中，他们为立方体中一致平衡测度获得了一个自由能展开，其中包含一个明确的误差项，与表面成比例，该误差项可以用一个函数 $f_{\mathsf{d}}(\beta)$ 表示。并且存在一个仅取决于维数 d 的常数 $C>0$，使得

$$-C\le f_{\mathsf{d}}(\beta)\le C\chi(\beta) \tag{3.2.14}$$

$$\text{在 }(0,\infty)\text{ 中 } f_{\mathsf{d}} \text{ 满足局部 Lipschitz，同时 } |f'_{\mathsf{d}}(\beta)|\le\frac{C\chi(\beta)}{\beta} \tag{3.2.15}$$

如果 R^{d} 是整数，我们有 f_{d} 的隐式表达式：

$$\frac{\log\mathsf{K}(\square_R,1)}{\beta R^{\mathsf{d}}}=-f_{\mathsf{d}}(\beta)+O\left(\chi(\beta)\frac{\rho_\beta}{R}+\frac{\beta^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\chi(\beta)^{1-\frac{1}{\mathsf{d}}}}{R}\log^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\frac{R}{\rho_\beta}\right) \tag{3.2.16}$$

其中 ρ_β 如(3.2.6)中所定义，$\mathsf{K}(\square_R,1)$ 是在 $\square_R$ 中密度为 1 的被放大后 Coulomb 气体恰当的配分函数。

次阶 Coulomb 能量被定义为：

$$\mathsf{F}_N(X_N,\mu)=\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\setminus\triangle}\mathsf{g}(x-y)d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-N\mu\right)(x)d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i}-N\mu\right)(y) \tag{3.2.17}$$

其中 $\triangle$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 的对角线，μ 是任意的概率测度。当在适当的测度周围展开 $\mathcal{H}_N$ 时次阶 Coulomb 能量会出现。

此外，我们有一个“分裂公式”，可以在 [3] 中找到：对于所有具有两两不同点的状态 $X_N\in(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N$，我们有：

$$\mathcal{H}_N(X_N)=N^2\mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta)-\frac{N}{\theta}\sum_{i=1}^N\log\mu_\theta(x_i)+\mathsf{F}_N(X_N,\mu_\theta) \tag{3.2.18}$$

其中 $\mathcal{E}_\theta^V$ 如(3.1.6)中所定义，F_N 如(3.2.17)中所定义，且 $\triangle$ 表示 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}\times\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 中的对角线。这将使主导项 $N^2\mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta)$ 与次阶项分开。其中 $-\frac{1}{\theta}\log\mu_\theta$ 是次阶有效约束势。

同时，我们介绍 [3] 中首次引入的局部 Neumann 版本的次阶能量。考虑 U 是 $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ 的子集，具有分段 C^1 边界，Ω 是 U 的子集，并引入改进的最小距离：

$$\tilde{\mathsf{r}}_i := \frac{1}{4}\begin{cases} \min\left(\min\limits_{x_j\in\Omega, j\neq i}|x_i-x_j|, \mathrm{dist}(x_i,\partial U\cap\Omega)\right) & \text{当 } \mathrm{dist}(x_i,\partial\Omega\backslash\partial U)\geq \frac{1}{2}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}} \\ \min\left(N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}, \mathrm{dist}(x_i,\partial U\cap\Omega)\right) & \text{其他情况} \end{cases} \tag{3.2.19}$$

这确保球 $B(x_i,\tilde{\mathsf{r}}_i)$ 仍然包含在 U 中。如果 $N\mu(U)=\mathrm{n}$ 是一个整数，对于在 U 中的点的状态 X_{n}，令 $\mathsf{g}(\eta)=-\log|\eta|$，$\mathsf{d}=2$ 和 $\mathsf{g}(\eta)=\eta^{2-\mathsf{d}}$，$\mathsf{d}\geq 3$ ，对于任意 $\eta>0$，我们定义

$$\mathsf{f}_\eta(x)=(\mathsf{g}(x)-\mathsf{g}(\eta))+, \tag{3.2.20}$$

其中 $(\cdot)+$ 表示数的正部。

最后，我们可以定义次阶 Coulomb 能量(3.2.17)的局部版本：

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_N^\Omega(X_{\mathrm{n}},\mu,U) = \frac{1}{2\mathsf{c}_{\mathsf{d}}}\left(\int_\Omega |\nabla v_{\tilde{\mathsf{r}}}|^2 - \mathsf{c}_{\mathsf{d}}\sum_{i,x_i\in\Omega}\mathsf{g}(\tilde{\mathsf{r}}_i)\right) - N\sum_{i,x_i\in\Omega}\int_U \mathsf{f}_{\tilde{\mathsf{r}}_i}(x-x_i)d\mu(x) \\ +\sum_{i,x_i\in\Omega}\left(\mathsf{g}(\frac{1}{4}\mathrm{dist}(x_i,\partial U)) - \mathsf{g}(\frac{N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}}{4})\right)_+\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

其中 $\tilde{\mathsf{r}}$ 表示向量 $(\tilde{\mathsf{r}}_1,\ldots,\tilde{\mathsf{r}}\mathrm{n})$

$$\begin{cases} -\Delta v = \mathsf{c}_{\mathsf{d}}\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\delta_{x_i} - N\mu\right) & \text{在 } U\text{中} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{在 } \partial U\text{上} \end{cases} \tag{3.2.22}$$

其中 $\partial/\partial\nu$ 表示法线导数。

当 $\Omega=U$ 时，我们用 $\mathsf{F}_N(X_{\mathrm{n}},\mu,U)$ 表示 $\mathsf{F}_N^U(X_{\mathrm{n}},\mu,U)$。

3.3 主要结果

定义算子：

$$L=\frac{1}{\mathsf{c}_{\mathsf{d}}\mu_\theta}\Delta$$

定理 3.3.1 (**二维情况下误差的估计**) 如果 $V \in C^7$, 且满足(3.2.2)–(3.2.4)。同时 $\xi \in C^4$, $\operatorname{supp}\xi \subset Q_\ell \subset \hat{\Sigma}$ ，其中 ℓ 是固定的常数, 且满足:

$$|\xi|_{C^k} \leq C\ell^{-k} \quad \text{对任意 } k \leq 4$$

则对任意固定的逆温度 β, 和任意一致的 $|\tau| \leq \tau_N$，其中 τ_N 满足 $\frac{\tau_N}{N^{\frac{7}{8}}} \to 0$ 和 $\tau_N \to \infty$ （当 $N \to \infty$），有：

$$\exp\left(\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau\beta\ell^2(\operatorname{Fluct}(\xi) - m(\xi))\right)\right) = \exp(O\left(\tau_N^4 N^{-4}\right))$$

其中

$$v(\xi) = -\frac{3}{2\mathsf{c}_2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2 - \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^2}\mu_\theta\,|L(\xi)|^2$$
$$m(\xi) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Delta\xi}{\mathsf{c}_2}\right)\log\mu_\theta$$

$\theta = \beta N$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}$ 表示 $\mathbb{P}_{N,\beta}$ 概率测度下的数学期望。

注 3.3.1 在 [5] 中, 作者使用循环方程方法建立了一维情况下 β-集合的线性统计量的中偏差原理, 其中误差项的阶数略好于这篇文章中的阶数。

推论 3.3.1 (**二维情况下的大偏差**) 在定理 3.3.1的条件下，我们有：

$$\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}\operatorname{Fluct}(\xi)$$

按 τ_N^2 的速度满足大偏差原则，其速率函数为 $J(x) = \frac{x^2}{r(\xi)}$，其中

$$r(\xi) := \ell^4\beta\frac{3}{2\mathsf{c}_2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2$$

即：对任意闭集 $F \subset \mathbb{R}$，满足

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\tau_N^2}\log\mathbb{P}_{N,\beta}\left(\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}\operatorname{Fluct}(\xi) \in F\right)$$
$$\leq -\inf_{x\in F}J(x)$$

和任意开集 $G \subset \mathbb{R}$，满足

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{\tau_N^2}\log\mathbb{P}_{N,\beta}\left(\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}\operatorname{Fluct}(\xi) \in G\right)$$
$$\geq -\inf_{x\in G}J(x)$$

推论 3.3.2 (**二维情况下的正态渐进收敛速度**) 在定理 3.3.1的条件下，给定逆温度 β，设 ϕ_N 和 ϕ 分别是 $\mathrm{Fluct}(\xi)-m(\xi)$ 和正态分布 $N(0,\frac{3}{\mathsf{c}_2\beta}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\xi|^2)$ 的特征函数。对 $\mathbb{R}$ 中的任意一个紧致集 K，我们有:

$$\sup_{x\in K}|\phi_N(x)-\phi(x)|=O\left(N^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{3}{4}}N\right)$$

注 3.3.2 1. 在 [7] 中，作者使用更一般的 Fourier 级数方法给出了一维情况下 β-集合的线性统计量的正态渐进逼近速度，但其方法的缺陷是无法导出像定理3.3.1内的指数渐进估计。

2. 当维数 d 大于 2 时，此时若想要高斯震荡收敛到正态分布，需要另一种极限的趋向方式，见 [11] 中推论 2.4。

定理 3.3.2 (**维数 ≥ 3 时误差的估计**) 如果 $V\in C^7$, 且满足(3.2.2)–(3.2.4)。同时 $\xi\in C^4$, $\operatorname{supp}\xi\subset Q_\ell\subset\hat{\Sigma}$ ，其中 ℓ 是固定的常数, 且满足:

$$|\xi|_{C^k}\leq C\ell^{-k}\quad \text{对任意 } k\leq 4$$

则对任意固定的逆温度 β 和任意一致的 $|\tau|\leq\tau_N$，其中 τ_N 满足 $\frac{\tau_N}{N^{\frac{1}{2}+\frac{1}{d}}}\to 0$ 和 $\frac{\tau_N}{N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}}\to\infty$ （当 $N\to\infty$），有:

$$\exp\left(\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau N^{\frac{1}{d}-\frac{1}{2}}\beta\ell^2(\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))\right)\right)=\exp(O\left(\tau_N N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}\right))$$

其中

$$v(\xi)=-\frac{3}{2\mathsf{c}_\mathsf{d}}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2-\frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^d}\mu_\theta\,|L(\xi)|^2$$
$$m(\xi)=\left(1-\frac{2}{\mathsf{d}}\right)\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\left(\frac{\Delta\xi}{\mathsf{c}_\mathsf{d}}\right)\left(f_\mathsf{d}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})+\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}f_\mathsf{d}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})\right)$$

$\theta=\beta N^{\frac{2}{d}}$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}$ 表示 $\mathbb{P}_{N,\beta}$ 概率测度下的数学期望。

注 3.3.3 我们可以看到维数 ≥ 3 时的表现比二维时的差一些。

推论 3.3.3 (**维数 ≥ 3 的大偏差**) 在定理 3.3.2的条件下，我们有

$$\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}(\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))$$

按 τ_N^2 的速度满足大偏差原则，其速率函数为 $J(x)=\frac{x^2}{r(\xi)}$，其中

$$m(\xi)=\left(1-\frac{2}{\mathsf{d}}\right)\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\left(\frac{\Delta\xi}{\mathsf{c}_\mathsf{d}}\right)\left(f_\mathsf{d}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})+\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}f_\mathsf{d}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})\right)$$

$$r(\xi) := \ell^4\beta\frac{3}{2\mathsf{c_d}}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2$$

即：对任意闭集 $F\subset\mathbb{R}$，满足

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{\tau_N^2}\log\mathbb{P}_{N,\beta}\left(\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}(\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))\in F\right)$$
$$\leq -\inf_{x\in F}J(x)$$

和任意开集 $G\subset\mathbb{R}$，满足

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{\tau_N^2}\log\mathbb{P}_{N,\beta}\left(\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}(\mathrm{Fluct}(\xi)-N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))\right)$$
$$\geq -\inf_{x\in G}J(x)$$

3.4 论文安排

在第 4 章中，我们介绍了 [11] 中的运输方法，并找到了一个适当的运输函数。然后，我们证明了一些引理来估计后续误差余项的阶数。

在第 5 章中，我们将在运输方法中产生的误差余项分为四个部分。我们使用第 4 章中的引理来计算每个部分的余项的阶数。

在第 6 章中，我们通过将第 5 章中的估计与第 4 章中的引理结合起来依次证明了第3章中的定理与推论。

4 初步预备

4.1 运输方法介绍

通常我们使用基于 Johansson 方法 [6] 对震荡进行控制，该方法的核心在于计算波动的拉普拉斯变换，然后直接简化到计算两个配分函数的比值，即关于势场为 V 的 Coulomb 气体和势场为 $V_t := V + t\xi$ 的 Coulomb 气体的配分函数比值。在使用热平衡测度的表述中，利用等式(5.0.4)，我们可以得到一个简洁的形式：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(e^{-\beta t N^{\frac{2}{\mathsf{d}}}\sum_{i=1}^N \xi(x_i)}\right) = \frac{Z_{N,\beta}^{V_t}}{Z_{N,\beta}^{V}} = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\mu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta))\right)\frac{\mathsf{K}_N(\mu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} \tag{4.1.1}$$

其中 μ_θ^t 是与 V_t 相关的热平衡测度。

其中 $\exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\mu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta))\right)$ 的估计并不困难，这一部分在引理4.3.1中完成。主要的困难是估计比值 $\frac{\mathsf{K}_N(\mu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}$。

我们发现估计上述从 μ_θ 到 μ_θ^t 的差值是困难的，因此引入了运输方法，即在 [9] 中的方法 — 用形式为 $(\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta$ 的逼近 $\tilde{\mu_\theta^t}$ 代替 μ_θ^t（其中 # 表示与概率测度的复合)，该方法在 t 的第一阶逼近中与 μ_θ^t 相同。

选择近似 $\tilde{\mu_\theta^t}$ 是因为它可以简单地被表达为 μ_θ 的运输，即 $(\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta$，其中 ψ 是一个确定的运输映射。这也是使用运输方法的动机，在最初的方法中，准确表达出扰动的热平衡测度 μ_θ^t 更加困难，并且也没有在其他的文献中找到相关的结论。

然后，我们剩下估计 $\log \mathsf{K}_N(\mu)$ 沿着运输的变化。如果 μ 和 $\Phi\#\mu$ 是两个概率测度，根据定义，我们有：

$$\frac{\mathsf{K}_N(\Phi\#\mu)}{\mathsf{K}_N(\mu)} = \frac{1}{\mathsf{K}_N(\mu)}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(X_N, \Phi\#\mu)\right) d(\Phi\#\mu)^{\otimes N}(X_N) \tag{4.1.2}$$

$$= \frac{1}{\mathsf{K}_N(\mu)}\int_{(\mathbb{R}^{\mathsf{d}})^N} \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(\Phi(X_N), \Phi\#\mu)\right) d\mu^{\otimes N}(X_N) \tag{4.1.3}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu)}\left(\exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}(\mathsf{F}_N(\Phi(X_N), \Phi\#\mu) - \mathsf{F}_N(X_N, \mu)\right)\right) \tag{4.1.4}$$

其中 Q_N 是等式(3.2.13)中定义的 Gibbs 测度。因此，我们只需估计输运 $\Phi_t(X_N)$ 沿着输运 $\Phi_t = \mathrm{Id} + t\psi$ 的变化，其中 $\mu_t = \Phi_t \# \mu$ 是概率密度，当 t 足够小时，这一部分将在引理4.3.6中证明。

4.2 运输函数选择

回忆：

$$L := \frac{1}{\mathsf{c_d}\mu_\theta}\Delta \tag{4.2.1}$$

并且从(3.2.9)中可知，μ_θ 在 C^3 中是一致有界的。这样，L 的迭代 L^k 满足估计

$$|L^k(\xi)|_{C^\sigma} \leq C \sum_{m=\min(2k,2)}^{2k+\sigma} |\xi|_{C^m} \quad 若 \quad 2k+\sigma \leq 3 \tag{4.2.2}$$

其中 C 依赖于 V, σ, k，我们将反复使用这个结论。

我们现在选择 ψ 来定义 $\tilde{\mu_\theta^t}$：

根据定义，μ_θ^t 是与 $V_t = V + t\xi$ 相关的热平衡测度，满足

$$\mathsf{g} * \mu_\theta^t + V + t\xi + \frac{1}{\theta}\log \mu_\theta^t = C_t \quad 在 \ \mathbb{R}^{\mathsf{d}}中 \tag{4.2.3}$$

与等式(3.1.8)进行比较并对关于 t 变量进行线性化，我们发现应该选择满足等式：

$$-\mathsf{g} * (\mathrm{div}\,(\psi\mu_\theta)) + \xi - \frac{1}{\theta\mu_\theta}\mathrm{div}\,(\psi\mu_\theta) = 0 \tag{4.2.4}$$

的函数 ψ。

我们可以解出：

$$\psi = -\frac{\nabla h}{\mathsf{c_d}\mu_\theta}$$

其中 h 满足：

$$-\frac{\Delta h}{\mathsf{c_d}\theta\mu_\theta} + h = \xi$$

然而这个 ψ 无法在 ξ 的支撑上局部化，并且很难得到一个精细的有界性估计。

所以我们首先选择运输映射：

$$\psi := -\frac{\nabla \xi}{\mathsf{c_d}\mu_\theta} \tag{4.2.5}$$

接着我们使用两个不同的逼近来克服这个困难：

第一个是用 ψ 运输 μ_θ，即

$$\tilde{\mu_\theta^t} := (\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta \tag{4.2.6}$$

第二个是

$$\nu_\theta^t := \mu_\theta + \frac{t}{\mathsf{c_d}}\Delta\xi \tag{4.2.7}$$

其中 ν_θ^t 是 $\tilde{\mu_\theta^t}$ 的一个很好的逼近。此外，由于 ν_θ^t 是(4.2.3)的近似解，因此也很容易计算。

我们注意到 $\nu_\theta^t - \mu_\theta$ 支撑在包含 $\operatorname{supp}\xi$ 的 Q_ℓ 中。此外由于 $\int \nu_\theta^t = \int \mu_\theta = 1$ 和条件(3.2.4)，既然 $\operatorname{supp}\xi \subset \hat{\Sigma}$ ，$\mu_\theta \geq \frac{\alpha}{2\mathsf{c_d}}$ ，为了使 ν_θ^t 成为概率密度，只需

$$\|t\Delta\xi\|_{L^\infty} < \frac{\alpha}{4} \tag{4.2.8}$$

我们还需要条件：

$$\left\|t\frac{1}{\mu_\theta}\nabla\xi\right\|_{L^\infty} < \frac{\alpha}{2\mathsf{c_d}} \quad \text{and} \quad \left|t\frac{1}{\mu_\theta}\nabla\xi\right|_{C^1} < \frac{\alpha}{2\mathsf{c_d}} \tag{4.2.9}$$

以确保(4.2.5)对 ψ 的定义满足：

$$|t|(|\psi|_{L^\infty} + |\psi|_{C^1}) < 1 \tag{4.2.10}$$

这是为了保证：在对运输后的配分函数进行微分时，存在一个关于 t 的邻域使其收敛。

4.3 引理及证明

引理 4.3.1 我们有：

$$\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta) - t\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \xi d\mu_\theta = -t^2 v(\xi) + O\left(\frac{t^3}{\theta}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \mu_\theta\,|L(\xi)|^3\right) \tag{4.3.1}$$

其中 $v(\xi) := -\frac{3}{2\mathsf{c_d}}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} |\nabla\xi|^2 - \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \mu_\theta\,|L(\xi)|^2$。

证明 首先我们有：

$$\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \iint \mathsf{g}(x-y) d\nu_\theta^t(x) d\nu_\theta^t(y) - \frac{1}{2} \iint \mathsf{g}(x-y) d\mu_\theta(x) d\mu_\theta(y) + \int V_t \, d\nu_\theta^t - \int V \, d\mu_\theta \right)$$
$$+ \frac{1}{\theta} \left(\int \nu_\theta^t \log \nu_\theta^t - \int \mu_\theta \log \mu_\theta \right)$$
$$= \frac{1}{2} \iint \mathsf{g}(x-y) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)(x) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)(y) + \iint \mathsf{g}(x-y) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)(x) d\mu_\theta(y)$$
$$+ \int V d(\nu_\theta^t - \mu_\theta) + t \int \xi d\mu_\theta + t \int \xi d(\nu_\theta^t - \mu_\theta) + \frac{1}{\theta} \left(\int \nu_\theta^t \log \nu_\theta^t - \int \mu_\theta \log \mu_\theta \right)$$
$$= \frac{1}{2} \iint \mathsf{g}(x-y) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)(x) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)(y) + \int (\mathsf{g} * \mu_\theta + V + \frac{1}{\theta} \log \mu_\theta) d(\nu_\theta^t - \mu_\theta)$$
$$+ t \int \xi d\mu_\theta + t \int \xi d(\nu_\theta^t - \mu_\theta) + \frac{1}{\theta} \int \nu_\theta^t (\log \nu_\theta^t - \log \mu_\theta)$$

因为 μ_θ 在等式(4.2.3)中的定义, 右边的第二项为 0，我们只剩下:

$$\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^V(\mu_\theta) - t \int \xi d\mu_\theta$$
$$= \frac{1}{2\mathsf{c}_\mathsf{d}} \int |\nabla (\mathsf{g} * (\nu_\theta^t - \mu_\theta))|^2 + t \int \xi d(\nu_\theta^t - \mu_\theta) + \frac{1}{2\theta} \int \mu_\theta \left(\frac{\nu_\theta^t}{\mu_\theta} - 1 \right)^2 + O\left(\frac{1}{\theta} \int \left(\frac{\nu_\theta^t}{\mu_\theta} - 1 \right)^3 \mu_\theta \right)$$

其中我们使用了 Taylor 展开。

我们注意到 ε_t 支撑在 $\operatorname{supp} \xi$ 中，并且

$$\mathsf{g} * \left(\nu_\theta^t - \mu_\theta \right) = -t\xi \tag{4.3.2}$$

因此我们使用等式 (4.3.5), (4.2.7)和 L 的定义，得到:

$$|\nabla (\mathsf{g} * (\nu_\theta^t - \mu_\theta))|^2 = t^2 |\nabla \xi|^2$$

和

$$\frac{\nu_\theta^t}{\mu_\theta} = 1 + tL(\xi)$$

结合在一起即可得到结论。 □

引理 4.3.2

$$\varepsilon_t := \mathsf{g} * \nu_\theta^t + V + t\xi + \frac{1}{\theta} \log \nu_\theta^t - C_\theta \tag{4.3.3}$$

其中 C_θ 定义在 (3.1.8), 我们有 ε_t 支撑在 $\operatorname{supp}\xi$ 和

$$|\varepsilon_t|_{C^1} \le Ct^2\frac{1}{\theta}|\xi|_{C^2}|\xi|_{C^3} + C\frac{t}{\theta}(|\xi|_{C^2} + |\xi|_{C^3}) \tag{4.3.4}$$

注 4.3.1 回忆

$$\mathsf{g} * \mu_\theta + V + \frac{1}{\theta}\log\mu_\theta = C_\theta$$

我们可以看到 ε_t 实际上是两个关于不同测度的类似(3.1.8)的等式之差。

证明 注意到 ε_t 支撑在 $\operatorname{supp}\xi$ 之中，并且

$$\mathsf{g} * \left(\nu_\theta^t - \mu_\theta\right) = -t\xi \tag{4.3.5}$$

也支撑在 $\operatorname{supp}\xi$ 之中。因为 $\mathsf{g} * \mu_\theta + V + \frac{1}{\theta}\log\mu_\theta = C_\theta$，等式(3.1.8) 和定义 (4.2.1) 及 (4.2.7), 我们推出

$$\begin{aligned}\varepsilon_t := \mathsf{g} * \nu_\theta^t + V + t\xi + \frac{1}{\theta}\log\nu_\theta^t - C_\theta &= -t\xi + \frac{1}{\theta}\log\left(1 + \frac{t}{\mathsf{c_d}}\frac{1}{\mu_\theta}\Delta\xi\right)\\ &= \frac{1}{\theta}(\log(1+f) - f) + \frac{t}{\theta}L(\xi)\end{aligned}$$

其中

$$f := \frac{t}{\mathsf{c_d}\mu_\theta}\Delta\xi = tL(\xi)$$

因此用 (4.2.2), 如果 $\sigma \le 1$, 我们有

$$|f|_{C^\sigma} \le Ct\sum_{m=2}^{2+\sigma}|\xi|_{C^m} \le Ct|\xi|_{C^{2+\sigma}} \tag{4.3.6}$$

我们现在在 (4.3.6)中令 $\sigma = 1$ ，计算 $\nabla(\log(1+f) - f) = \nabla f\left(\frac{1}{1+f} - 1\right)$，发现:

$$|\varepsilon_t|_{C^1} \le \frac{C}{\theta}|f|_{C^1}\|f\|_{L^\infty} + C\frac{t}{\theta}(|\xi|_{C^2} + |\xi|_{C^3}) \le C\frac{t^2}{\theta}|\xi|_{C^3}|\xi|_{C^2} + C\frac{t}{\theta}(|\xi|_{C^2} + |\xi|_{C^3}) \tag{4.3.7}$$

因此引理成立。 □

引理 4.3.3 我们有:

$$\left|\log\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right)\right)\right)\right| \le C\sqrt{\chi(\beta)}\beta N^{1+\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell^{\mathsf{d}}|\varepsilon_t|_{C^1} + C\theta N\ell^{\mathsf{d}}|\varepsilon_t|_{C^1}^2 \tag{4.3.8}$$

证明 这是 [11] 中的引理 5.4。 $\square$

引理 4.3.4 简记 $\#I_N$ 为 $\#I_{U_\ell}$ 和

$$\Xi(t) := \mathsf{F}_N^{U_\ell}((\mathrm{Id}+t\psi)(X_N),(\mathrm{Id}+t\psi)\#\mu_\theta)+\left(\frac{\#I_N}{4}\log N\right)\mathbf{1}_{\mathsf{d}=2}+C_0\#I_N N^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}} \tag{4.3.9}$$

其中 $C_0>0$ 只依赖 μ 在 Ω 内的上界。如果 $t|\psi|_{C^1(U_\ell)}$ 足够小, 我们有:

$$\Xi(t)\le C\Xi(0) \tag{4.3.10}$$

$$|\Xi'(t)|\le C|\psi|_{C^1(U_\ell)}\Xi(t), \tag{4.3.11}$$

其中 C 只依赖 d 和 $\|\mu_\theta\|_{L^\infty}$。并且，如果 $t|\psi|_{C^2}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})$ 足够小, 对任意的 $\alpha'>0$ 和 $0<\sigma\le 1$, 我们有:

$$|\Xi''(t)|\le C\Bigg[|\psi|_{C^1}^2\left(1+N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^1(U_\ell)}+N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^2(U_\ell)}\right)+|\psi|_{C^2}\|\psi\|_{L^\infty}(1+N^{-\frac{\sigma}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^\sigma(U_\ell)}) \tag{4.3.12}$$

$$+|\psi|_{C^1}|\psi|_{C^2}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})(1+N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^2(U_\ell)})\Bigg]$$
$$\times\left((N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{\alpha'(\mathsf{d}-2)}\mathbf{1}_{\mathsf{d}\ge3}+\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})\mathbf{1}_{\mathsf{d}=2}\right)\Xi(t)$$
$$+\ell^{-1}\|\psi\|_{L^\infty}|\psi|_{C^1}\Bigg[(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{-1}\left(1+N^{-\frac{1+\sigma}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^{1+\sigma}(U_\ell)}+N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^1(U_\ell)}\right)\Xi(t)\mathbf{1}_{\mathsf{d}=2}$$
$$+\Bigg(\left((N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'}(1+N^{-\frac{1+\sigma}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^{1+\sigma}(U_\ell)})+(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\alpha'}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}|\tilde{\mu_\theta^t}|_{C^1(U_\ell)}\right)\Xi(t)$$
$$+(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\Xi(t)^{\frac{\mathsf{d}-1}{\mathsf{d}-2}}\Bigg)\mathbf{1}_{\mathsf{d}\ge3}\Bigg]$$

其中 C 只依赖维数 d, $\|\mu_\theta\|_{L^\infty(U_\ell)}$ 和 $t|\psi|_{C^1}$ 的上界还有 $t|\psi|_{C^2}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})$。

同时也有:

$$|\Xi''(t)|\le C\Bigg[|\psi|_{C^1}^2\left(1+N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}t|\psi|_{C^2}+N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}(t^2|\psi|_{C^2}^2+t|\psi|_{C^3})\right)+|\psi|_{C^2}\|\psi\|_{L^\infty}(1+N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}t|\psi|_{C^2}) \tag{4.3.13}$$

$$+|\psi|_{C^1}|\psi|_{C^2}N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})\left(1+N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}(t^2|\psi|_{C^2}^2+t|\psi|_{C^3})\right)\Bigg]$$

$$
\times \left((N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{\alpha'(\mathsf{d}-2)} \mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 3} + \log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}) \mathbf{1}_{\mathsf{d}=2} \right) \Xi(t)
$$

$$
+ \ell^{-1} \|\psi\|_{L^\infty} |\psi|_{C^1} \Bigg[(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{-1} \left(1 + N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}(t^2|\psi|_{C^2}^2 + t|\psi|_{C^3}) + tN^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}|\psi|_{C^2} \right) \Xi(t) \mathbf{1}_{\mathsf{d}=2}
$$

$$
+ \Bigg(\left((N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'} \left(1 + N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}(t^2|\psi|_{C^2}^2 + t|\psi|_{C^3}) \right) + (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\alpha'} N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}(1 + t|\psi|_{C^2}) \right) \Xi(t)
$$

$$
+ (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'} N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}} \Xi(t)^{\frac{\mathsf{d}-1}{\mathsf{d}-2}} \Bigg) \mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 3} \Bigg]
$$

其中 C 只依赖 μ_θ 的范数，μ_θ 的下界还有维数 d。

注 4.3.2 这是我们代替循环方程方法的关键一步。

证明 在 [11] 中的命题 4.2 令 $\mu = \mu_\theta$，因此我们得到 (4.3.12)。

然后注意到，我们有：

$$
|(\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta|_{C^1} \leq C \left(|\mu_\theta|_{C^1} + |t\psi|_{C^2} \right) \tag{4.3.14}
$$

$$
|(\mathrm{Id} + t\psi)\#\mu_\theta|_{C^2} \leq C \Big(|\mu_\theta|_{C^2} + (|\mu_\theta|_{C^1} + |t\psi|_{C^2})(1 + |t\psi|_{C^2}) + |t\psi|_{C^3} \Big) \tag{4.3.15}
$$

代入(4.3.12)中，因此我们得到 (4.3.13)。 □

引理 4.3.5 (**局部法则**) 我们有：

$$
\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(U,\mu_\theta)} \left(\exp \left(\frac{1}{2}\beta \left(N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1} \mathsf{F}_N^{Q_\ell}(\cdot, \mu_\theta, U) + \left(\frac{\mathrm{n}}{4} \log N \right) \mathbf{1}_{\mathsf{d}=2} \right) + C\# \left(\{X_{\mathrm{n}}\} \cap Q_\ell \right) \right) \right) \leq C\beta\chi(\beta) N \ell^{\mathsf{d}} \tag{4.3.16}
$$

其中 ℓ 定义在 (3.2.10)中。

证明 直接在 [11] 中的命题 3.7 令 $\mu = \mu_\theta$ 即可得到结论 □

注 4.3.3 这给了我们次阶 Coulomb 能量的一个上界估计。

引理 4.3.6 在引理 4.3.4中，记 $\mathsf{A}_1(X_N, \mu_\theta, \psi) := \Xi'(0)$

并定义：

$$
\mathcal{Z}(\beta, \mu) := -\beta \int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \mu^{2-\frac{2}{\mathsf{d}}} f_{\mathsf{d}}(\beta \mu^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}) - \frac{\beta}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \mu \log \mu \right) \mathbf{1}_{\mathsf{d}=2} \tag{4.3.17}
$$

和 $\mathcal{B}_1(\beta, \mu_\theta, \psi)$ 是函数 $\mathcal{Z}(\beta, \tilde{\mu_\theta^t})$ 在 $t = 0$ 的导数。

假设

$$
|\psi|_{C^k} \leq C\ell^{-k-1} \quad \text{for } 0 \leq k \leq 3 \tag{4.3.18}
$$

和 $t\ell^{-2} < 1$ 足够小，对任意 t 满足:

$$|t| < t_0 := C^{-1}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)^{\frac{1}{2}} D_N(\psi) \tag{4.3.19}$$

其中

$$\begin{cases} D_N(\psi)^{-2} := \ell^{-4}\log(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell) & \text{当 } \mathsf{d}=2 \\ D_N(\psi)^{-2} := \ell^{-4}\left(\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{\alpha'(\mathsf{d}-2)} + (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\alpha'} + (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'+\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}}\right) & \text{当 } \mathsf{d}\geq 3 \end{cases} \tag{4.3.20}$$

和

$$\mathcal{R}(N,\ell,\mu) := \max\left(x(1+|\log x|), (y^{\frac{1}{2}}+y)(1+|\log y|^{\frac{1}{\mathsf{d}}})\right) \tag{4.3.21}$$

其中

$$x := \frac{\rho_\beta}{\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}}, \quad y := \frac{\rho_\beta|\mu|_{C^1}}{N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}} \tag{4.3.22}$$

如果 $\mathsf{d}=2$, 我们有

$$\begin{aligned}\log\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = tN\frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \operatorname{div}(\psi\mu_\theta)\log\mu_\theta \\ + O\left(t\beta\chi(\beta)N\ell^\mathsf{d}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)^{\frac{1}{2}}D_N(\psi)^{-1}\right)\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

如果 $\mathsf{d}\geq 3$，我们有

$$\begin{aligned}\log\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = tN\left(1-\frac{2}{\mathsf{d}}\right)\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}} \operatorname{div}(\psi\mu_\theta)\left(f_\mathsf{d}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}) + \beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}f'_\mathsf{d}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})\right) \\ + O\left(t\beta N\ell^\mathsf{d}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)^{\frac{1}{2}}D_N(\psi)^{-1}\right) + o(1)\end{aligned} \tag{4.3.24}$$

证明 首先我们定义“好事件”:

$$G = \begin{cases} (\mathbb{R}^\mathsf{d})^N & \text{当 } \mathsf{d}=2 \\ \{X_N, \mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N) \leq M(N\ell^\mathsf{d})N^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}\} & \text{当 } \mathsf{d}\geq 3 \end{cases}$$

其中 M 是某个常数.

应用引理4.3.4，我们有一个关于次阶 Coulomb 能量沿着运输的控制:

$$\mathsf{F}_N^{Q_\ell}(\Phi_t(X_N), \Phi_t\#\mu_\theta) \leq C\mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N,\mu_\theta)$$

结合不等式 (4.3.16) 和引理4.3.4, 我们有如果选择 M 足够大,

$$\log \mathbb{P}_{N,\beta}(G^c) \leq -\frac{1}{2}M\beta N\ell^{\mathsf{d}} \tag{4.3.25}$$

其中 N 足够大; 同时我们也有:

$$\begin{aligned}
&\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = \log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\left(\mathsf{F}_N^{Q_\ell}(\Phi_t(X_N),\Phi_t\#\mu_\theta) - \mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N,\mu_\theta)\right)\right)\right)\\
&= \log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\mathbf{1}_G \exp\left(-\beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\left(\mathsf{F}_N^{Q_\ell}(\Phi_t(X_N),\Phi_t\#\mu_\theta) \leq C\mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N,\mu_\theta)\right)\right)\right) + o(1)
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

这可以从等式(3.2.13)中得到。

接下来我们用不等式(4.3.13), (4.3.18)和条件 $t\ell^{-2} < 1$, 当维数 $\mathsf{d} = 2$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned}
\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = \log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\Bigg[\exp\Bigg(&-\beta\, t\mathsf{A}_1(X_N,\mu_\theta,\psi)\\
&+ t^2 O\Big(D_N(\psi)^{-2}\beta(N\ell^{\mathsf{d}} + \mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N,\mu_\theta))\Big)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

令

$$\gamma = \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{A}_1(X_N,\mu_\theta,\psi) + N\mathcal{B}_1(\beta,\mu_\theta,\psi) \tag{4.3.28}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\exp\left(-t\gamma + O\left(\beta t^2 D_N(\psi)^{-2}\left(N\ell^{\mathsf{d}} + \mathsf{F}_N^{Q_\ell}(X_N,\tilde{\mu_\theta^t})\right)\right)\right)\right)\\
&\qquad = O\left(t^2 N\ell^{\mathsf{d}}|\psi|^2_{C^1}\beta\chi(\beta)\right) + O\left(\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}(\mathcal{R}_t + \mathcal{R}_0)\right)
\end{aligned}$$

再次使用柯西不等式和不等式 (4.3.16) 我们推出如果 $|t|D_N(\psi)^{-1} < C^{-1}$ 和 $C > 2$, 有:

$$\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\mathbf{1}_G \exp\left(-\frac{1}{2}t\gamma\right)\right) = O\left(\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}\left(t^2 D_N(\psi)^{-2} + \mathcal{R}_t + \mathcal{R}_0\right)\right) \tag{4.3.29}$$

对于维数 d ≥ 3 我们使用不等式 (4.3.13)得到

$$
\begin{aligned}
\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} &= \log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\Bigg[\mathbf{1}_G \exp\Bigg(- \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1} t \mathsf{A}_1(X_N,\mu_\theta,\psi) \\
&+ \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1} t^2 O\Bigg(\Bigg(\Big(\ell^{-4}\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{\alpha'(\mathsf{d}-2)} + \ell^{-4}(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\alpha'}\Big)\Big(\mathsf{F}_N^{Q_\ell} + N^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}} N \ell^{\mathsf{d}}\Big) \\
&\qquad + \ell^{-4}(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'} N^{-\frac{1}{\mathsf{d}}}\Big(\mathsf{F}_N^{Q_\ell} + N^{2-\frac{2}{\mathsf{d}}}\ell^{\mathsf{d}}\Big)^{\frac{\mathsf{d}-1}{\mathsf{d}-2}}\Bigg)\Bigg)\Bigg] + o(1)
\end{aligned}
$$

同上，令(4.3.28)成立，使用引理 4.3.4 和我们在好事件 G 中的事实，我们有等式(4.3.29)也在 d ≥ 3 中成立，只相差一个 $o(1)$，这是因为 (4.3.20)的选择。

我们现在选择 $\alpha < D_N(\psi)$ 足够小，使得

$$
\frac{\alpha^2}{D_N(\psi)^2} \leq C(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_\alpha)
$$

成立。

同时我们令

$$
\alpha = C^{-1}\left(\max_{t\in[0,D_N(\psi)]} \mathcal{R}_t\right)^{\frac{1}{2}} D_N(\psi)
$$

如果 $\max_{t\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_t$ 有界，我们可以选择常数 C，使得 $\alpha < D_N(\psi)$ 成立。

由此得到：

$$
\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\mathbf{1}_G \exp\left(-\alpha\gamma\right)\right) = O\left(\beta\chi(\beta) N\ell^{\mathsf{d}} \max_{t\in[0,D_N(\psi)]} \mathcal{R}_t\right) + o(1)\mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 3} \tag{4.3.30}
$$

同样地可以应用于 $-\alpha$ 上。

使用 Hölder 不等式，我们推出如果 t/α 足够小，也即当(4.3.19) 成立时，我们有：

$$
\begin{aligned}
\left|\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\mathbf{1}_G \exp\left(\gamma t\right)\right)\right| &\leq C\frac{|t|}{\alpha}\left|\log \mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\mu_\theta)}\left(\mathbf{1}_G \exp\left(-\alpha\gamma\right)\right)\right| && (4.3.31) \\
&\leq C\frac{|t|}{\alpha}\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}} \max_{s\in[0,D_N(\psi)]} \mathcal{R}_s + o(1)\mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 3} && (4.3.32)
\end{aligned}
$$

将(4.3.28) 和(4.3.32) 带入 (4.3.27)之中, 然后再次使用 α 的定义和 (4.3.16), 我们得到:

$$\log \frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} = tN\mathcal{B}_1(\beta,\mu_\theta,\psi) + O\left(t\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}D_N(\psi)^{-1}\left(\max_{t\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_t\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$+ O\left(\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}t^2D_N(\psi)^{-2}\right) + o(1)\mathbf{1}_{\mathsf{d}\geq 3}$$

并且用条件 (4.3.19)，我们可以将第二项误差吸收进第一项之中。

最后，当维数 $\mathsf{d}=2$ 时，我们可以直接计算出

$$\mathcal{B}_1(\beta,\mu_\theta,\psi) = \frac{\beta}{4}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \mathrm{div}\,(\psi\mu_\theta)\log\mu_\theta$$

在维数 $\mathsf{d}\geq 3$ 时, 我们有

$$\mathcal{B}_1(\beta,\mu_\theta,\psi) = \left(1-\frac{2}{\mathsf{d}}\right)\beta\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}} \mathrm{div}\,(\psi\mu_\theta)\left(f_{\mathsf{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}) + \beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}f_{\mathsf{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})\right)$$

代入上述等式之中即可得到所需结论。 □

引理 4.3.7 如果 $V\in C^7$, 则我们有

$$|\log\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t) - \log\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})|$$
$$\leq C\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}t^2\left((|\xi|_{C^1}+|\xi|_{C^3}) + |\xi|_{C^1}|\xi|_{C^3} + \ell(|\xi|_{C^1}|\xi|_{C^2} + |\xi|_{C^1}|\xi|_{C^4} + |\xi|_{C^2}|\xi|_{C^2})\right) \tag{4.3.33}$$

其中 C 只依赖 μ_θ 在 $\mathrm{supp}\,\xi$ 至多 C^3 的范数。

证明 我们在 [11] 中的 (7.24) 令 $q=0$ 即可得到结论。 □

引理 4.3.8 (Gärtner–Ellis) 对于一列取值于 $\mathbb{R}^d$ 中的随机向量 (Z_n), 其中 Z_n 有分布 μ_n 和对数矩母函数 $\Lambda_n(\lambda)\triangleq\log E\left[e^{\langle\lambda,Z_n\rangle}\right]$。

若对任意 λ，$\Lambda(\lambda)\triangleq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Lambda_n(n\lambda)$ 都存在，并且 $\Lambda(\cdot)$ 的 Fenchel-Legendre 变换 $\Lambda^*(x)$ 是光滑函数，则我们有:

(a) 对任意闭集 F,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_n(F)\leq -\inf_{x\in F}\Lambda^*(x)$$

(b) 对任意开集 G,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in G} \Lambda^*(x)$$

证明 我们直接使用 [1] 中的定理 2.3.6, 光滑的速率函数 $\Lambda^*(x)$ 显然满足定理所需的要求。 $\square$

5　误差余项的估计

如果(4.2.8)和(4.2.9)都成立，回忆

$$\varepsilon_t := \mathsf{g} * \nu_\theta^t + V + t\xi + \frac{1}{\theta}\log\nu_\theta^t - C_\theta \tag{5.0.1}$$

我们有表达式:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_N^{V_t}(X_N) &= N^2\mathcal{E}^{V_t}(\nu_\theta^t) + N\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}(\mathsf{g}*\nu_\theta^t + V_t)d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right) + \mathsf{F}_N(X_N,\nu_\theta^t)\\ &= N^2\mathcal{E}^{V_t}(\nu_\theta^t) + N\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}(-\frac{1}{\theta}\log\nu_\theta^t + \varepsilon_t)d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right) + \mathsf{F}_N(X_N,\nu_\theta^t)\\ &= N^2\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t) + \mathsf{F}_N(X_N,\nu_\theta^t) - \frac{N}{\theta}\sum_{i=1}^N\log\nu_\theta^t(x_i) + N\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right)\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{E}_\theta^V$ 定义在等式中 (3.1.6)。将其代入到 $Z_{N,\beta}^{V_t}$ 的定义之中，然后使用 θ 在等式(3.1.7)中的定义，我们得到:

$$\begin{aligned}Z_{N,\beta}^{V_t} &= \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)\right)\\ &\times\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right) - \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}-1}\mathsf{F}_N(X_N,\nu_\theta^t)\right)d(\nu_\theta^t)^{\otimes N}(X_N)\end{aligned} \tag{5.0.2}$$

使用定义 (3.2.11) 和等式 (3.2.12)，我们可以将它改写成:

$$Z_{N,\beta}^{V_t} = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)\right)\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)\mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^\mathsf{d}}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^N\delta_{x_i} - N\nu_\theta^t\right)\right)\right) \tag{5.0.3}$$

使用分裂公式 (3.2.18), 我们有:

$$Z_{N,\beta}^{V} = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}\mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta)\right)\mathsf{K}_N(\mu_\theta) \tag{5.0.4}$$

这可以直接将(3.2.18)插入到 (3.1.4)之中然后使用等式(3.2.13)得到。

同时注意到:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(e^{-\beta t N^{\frac{2}{\mathsf{d}}}\sum_{i=1}^N\xi(x_i)}\right) = \frac{Z_{N,\beta}^{V_t}}{Z_{N,\beta}^{V}} = \exp\left(-\beta N^{1+\frac{2}{\mathsf{d}}}(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\mu_\theta^t) - \mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta))\right)\frac{\mathsf{K}_N(\mu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)} \tag{5.0.5}$$

其中 μ_θ^t 是与 V_t 相关的热平衡测度。

结合使用等式(5.0.4) 和 (5.0.5)，我们发现：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(e^{-t\beta N^{\frac{2}{d}}\sum_{i=1}^{N}\xi(x_i)}\right)\\
&=e^{-\beta N^{1+\frac{2}{d}}\left(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)-\mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta)\right)}\frac{\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}\mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}-N\nu_\theta^t\right)\right)\right)\\
&=e^{-\beta N^{1+\frac{2}{d}}\left(\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)-\mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta)\right)}\frac{\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}\frac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}\mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}-N\nu_\theta^t\right)\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.0.6}
$$

其中

$$
\mathsf{K}_N(\mu)=\int_{(\mathbb{R}^d)^N}\exp\left(-\beta N^{\frac{2}{d}-1}\mathsf{F}_N(X_N,\mu)\right)d\mu^{\otimes n}(X_n) \tag{5.0.7}
$$

使用高斯震荡的定义 (3.1.9)，我们可以得到：

$$
\left|\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(-t\beta N^{\frac{2}{d}}\mathrm{Fluct}(\xi)\right)\right)+t^2N^{1+\frac{2}{d}}\beta v(\xi)+tN\beta m(\xi)\right|\le\sum_{i=1}^{4}|\mathsf{Error}_i|
$$

其中

$$
v(\xi)=-\frac{3}{2\mathsf{c_d}}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2-\frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^d}\mu_\theta\,|L(\xi)|^2
$$

$$
m(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\Delta\xi}{\mathsf{c}_2}\right)\log\mu_\theta & \text{当 } \mathsf{d}=2\\ \left(1-\frac{2}{\mathsf{d}}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\Delta\xi}{\mathsf{c_d}}\right)\left(f_{\mathsf{d}}(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})+\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}f_{\mathsf{d}}'(\beta\mu_\theta^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}})\right) & \text{当 } \mathsf{d}\ge 3\end{cases}
$$

$$
|\mathsf{Error}_1|=\beta N^{1+\frac{2}{d}}|\mathcal{E}_\theta^{V_t}(\nu_\theta^t)-\mathcal{E}_\theta^{V}(\mu_\theta)-t\textstyle\int_{\mathbb{R}^d}\xi d\mu_\theta+t^2v(\xi)|
$$

$$
|\mathsf{Error}_2|=\left|\log\mathbb{E}_{\mathsf{Q}_N(\nu_\theta^t)}\left(\exp\left(-\theta\textstyle\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon_t\, d\left(\sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}-N\nu_\theta^t\right)\right)\right)\right|
$$

$$
|\mathsf{Error}_3|=|\log\tfrac{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}{\mathsf{K}_N(\mu_\theta)}+tN\beta m(\xi)| \qquad |\mathsf{Error}_4|=|\log\tfrac{\mathsf{K}_N(\nu_\theta^t)}{\mathsf{K}_N(\tilde{\mu_\theta^t})}|
$$

接下来我们固定 β 和 ℓ，假设 t 是依赖 N 的变量，我们想要估计这些误差余项的阶数。

5.1 第一项误差

使用引理 4.3.1和 $\theta = \beta N^{\frac{2}{\mathsf{d}}}$，我们有:

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{Error}_1| &= O\left(\frac{t^3}{\theta}\int_{\mathbb{R}^{\mathsf{d}}}\mu_\theta\,|L(\xi)|^3\right) \\
&= O\left(N^{-\frac{2}{\mathsf{d}}}t^3\right)
\end{aligned}
$$

5.2 第二项误差

结合引理 4.3.2和引理 4.3.3, 我们有:

$$
\begin{aligned}
&|\mathsf{Error}_2| \leq C\sqrt{\chi(\beta)}\beta N^{1+\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell^{\mathsf{d}}|\varepsilon_t|_{C^1} + C\theta N\ell^{\mathsf{d}}|\varepsilon_t|_{C^1}^2 \\
&\leq C(\beta,\ell)(N^{1+\frac{1}{\mathsf{d}}}(t^2\frac{1}{\theta}|\xi|_{C^2}|\xi|_{C^3}+C\frac{t}{\theta}(|\xi|_{C^2}+|\xi|_{C^3}))+\beta N(t^2\frac{1}{\theta}|\xi|_{C^2}|\xi|_{C^3}+C\frac{t}{\theta}(|\xi|_{C^2}+|\xi|_{C^3}))^2) \\
&= O\left(t^2N^{1-\frac{2}{\mathsf{d}}}\right) \quad (5.2.1)
\end{aligned}
$$

其中 $C(\beta,\ell)$ 是依赖 β 和 ℓ 的常数。

5.3 第三项误差

当维数 $\mathsf{d} = 2$ 时, $D_N(\psi)$ 定义在 (4.3.20) 中，满足

$$
C^{-1}\ell^2\left(\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})\right)^{-\frac{1}{2}} \leq D_N(\psi) \leq C\ell^2 \tag{5.3.1}
$$

在 $\mathsf{d} \geq 3$ 时, 我们有:

$$
C^{-1}\ell^2\left(\log(\ell N^{\frac{1}{\mathsf{d}}})(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{\alpha'(\mathsf{d}-2)} + (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\alpha'} + (N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-2\alpha'+\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}-2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq D_N(\psi) \leq C\ell^2 \tag{5.3.2}
$$

我们现在令

$$
\alpha' = \frac{2\mathsf{d}-2}{\mathsf{d}(\mathsf{d}-2)} \tag{5.3.3}
$$

让上面的不等式取到最优化，因此得到:

$$
D_N(\psi)^{-1} \leq C\ell^{-2}(N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell)^{1-\frac{1}{\mathsf{d}}} \tag{5.3.4}
$$

并且代入 $\mathcal{R}$ 的定义之中，我们可以得到上界：

$$\max_{s\in[0,C\ell^2]}\mathcal{R}_s = C\left(\frac{N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell}{\rho_\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\log\frac{N^{\frac{1}{\mathsf{d}}}\ell}{\rho_\beta}\right)^{\frac{1}{\mathsf{d}}} \tag{5.3.5}$$

结合引理 4.3.6 和(5.3.4)中的估计还有等式(5.3.5)，我们有：

$$\begin{aligned}|\mathsf{Error}_3| &= O\left(t\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}\left(\max_{s\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_s\right)^{\frac{1}{2}}D_N(\psi)^{-1}\right)\\ &= \begin{cases} O\left(tN^{\frac{7}{8}}\log^{\frac{3}{4}}N\right) & \text{当 } \mathsf{d}=2\\ O\left(tN^{1+\frac{3}{4d}-\frac{1}{d^2}}\right) & \text{当 } \mathsf{d}\geq 3\end{cases}\end{aligned}$$

5.4 第四项误差

我们直接使用引理4.3.7，得到：

$$\begin{aligned}|\mathsf{Error}_4| &\leq C\beta\chi(\beta)N\ell^{\mathsf{d}}t^2\left((|\xi|_{C^1}+|\xi|_{C^3})+|\xi|_{C^1}|\xi|_{C^3}+\ell(|\xi|_{C^1}|\xi|_{C^2}+|\xi|_{C^1}|\xi|_{C^4}+|\xi|_{C^2}|\xi|_{C^2})\right)\\ &= O\left(Nt^2\right)\end{aligned}$$

6　定理证明

为了选择 t 的值，我们先估计：

$$\left(\max_{t\in[0,D_N(\psi)]}\mathcal{R}_t\right)^{\frac{1}{2}}D_N(\psi)\geq\begin{cases}O\left(N^{-\frac{1}{8}}\right) & \text{当 } \mathsf{d}=2\\ O\left(N^{-\frac{5}{4d}+\frac{1}{d^2}}\right) & \text{当 } \mathsf{d}\geq 3\end{cases}$$

这可以直接由 5.3 节中的等式 (5.3.1), (5.3.4) 和 (5.3.5)得出。

6.1　维数 $d=2$

我们取 $t=-\tau N^{-1}\ell^2$, 其中 $|\tau|\leq\tau_N$, $\tau_N\to\infty$ 和 $\frac{\tau_N}{N^{\frac{7}{8}}}\to 0$ $(N\to\infty)$，因此我们有：

$$|t|\ll\ell^2$$

这可以保证引理 4.3.6 中的条件会成立。

将上述误差估计中的 t 替换掉，我们得到阶的估计：

$$|\mathsf{Error}_1|=O\left(\tau_N^3N^{-4}\right)$$

$$|\mathsf{Error}_2|=O\left(\tau_N^2N^{-2}\right)$$

$$|\mathsf{Error}_3|=O\left(\tau_N N^{-\frac{1}{8}}\log^{\frac{3}{4}}N\right)$$

$$|\mathsf{Error}_4|=O\left(\tau_N^2N^{-1}\right)$$

因此我们有：

$$\exp\left(\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau\beta\ell^2\{\mathrm{Fluct}(\xi)-m(\xi)\}\right)\right)=\exp\left(O\left(\tau_N^4N^{-4}\right)\right)\quad(6.1.1)$$

对任意 $s\in\mathbb{R}$，令 $\tau=s\tau_N$, 在两边取对数并除以 τ_N^2 ，我们得到：

$$\Lambda(s):=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\tau_N^2}\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau_N s\left\{\mathrm{Fluct}(\xi)-m(\xi)\right\}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\tau_N^2} \log \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}} \left(\exp\{\tau_N s \mathrm{Fluct}(\xi)\}\right) \\
&= \ell^4 \beta \frac{3s^2}{2\mathsf{c}_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi|^2 =: s^2 r(\xi)
\end{aligned}
$$

我们可以看出 $\Lambda(s)$ 显然是光滑函数, 并且其中

$$
r(\xi) := \ell^4 \beta \frac{3}{2\mathsf{c}_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi|^2
$$

因此我们得到 $\Lambda(s)$ 的 Fenchel-Legendre 变换:

$$
J(x) := \frac{x^2}{r(\xi)}
$$

应用引理4.3.8，我们可以得到 $\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}\mathrm{Fluct}(\xi)$ 的大偏差原理。

再在等式(6.1.1)中取 $\tau = \mathrm{i}x\beta^{-1}\ell^{-2}$，其中 i 是虚数单位，$x \in \mathbb{R}$。下面固定变量 x 在 $\mathbb{R}$ 中的某个紧致集内，我们有:

$$
\begin{aligned}
\phi_N(x) &:= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}} \left(\exp\left(\mathrm{i}x\{\mathrm{Fluct}(\xi) - m(\xi)\}\right)\right) && (6.1.2)\\
&= \exp\left(x^2\beta^{-1} v(\xi) + O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right)\right) && (6.1.3)\\
&= \exp\left(-x^2\beta^{-1} \frac{3}{2\mathsf{c}_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi|^2 - x^2\beta^{-1} \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \mu_\theta |L(\xi)|^2 + O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right)\right) && (6.1.4)\\
&= \exp\left(-x^2\beta^{-1} \frac{3}{2\mathsf{c}_2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi|^2 + O\left(N^{-1}\right) + O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right)\right) && (6.1.5)\\
&=: \phi(x) \exp\left(O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right)\right) && (6.1.6)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\phi(x) := \exp\left(\frac{-3x^2}{2\mathsf{c}_2\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \xi|^2\right)
$$

ϕ 是正态分布 $N(0, \frac{3}{\mathsf{c}_2\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\xi|^2)$ 的特征函数，而 ϕ_N 是 $\mathrm{Fluct}(\xi) - m(\xi)$ 的特征函数。

因此，我们得到了高斯震荡的特征函数趋向正态分布 $N(0, \frac{3}{\mathsf{c}_2\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\xi|^2)$ 特征函数的渐进速度:

对 $\mathbb{R}$ 中的任意一个紧致集 K，我们有:

$$
\sup_{x\in K} |\phi_N(x) - \phi(x)| \leq |\exp\left(O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right)\right) - 1| \sim O\left(N^{-\frac{1}{8}} \log^{\frac{3}{4}} N\right) \qquad (6.1.7)
$$

6.2 维数 $d \geq 3$

同理，我们选择 $t = -\tau N^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{d}}\ell^2$, 其中 $|\tau| \leq \tau_N$, $\tau_N \to \infty$ 和 $\frac{\tau_N}{N^{1+\frac{1}{d^2}-\frac{5}{4d}}} \to 0$ $(N \to \infty)$。

$$|\mathsf{Error}_1| = O\left(\tau_N^3 N^{-\frac{3}{2}-\frac{5}{d}}\right)$$
$$|\mathsf{Error}_2| = O\left(\tau_N^2 N^{-\frac{4}{d}}\right)$$
$$|\mathsf{Error}_3| = O\left(\tau_N N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}\right)$$
$$|\mathsf{Error}_4| = O\left(\tau_N^2 N^{-\frac{2}{d}}\right)$$

因此我们得到：

$$\exp\left(\tau^2\ell^4\beta v(\xi)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau N^{\frac{1}{d}-\frac{1}{2}}\beta\ell^2\{\mathrm{Fluct}(\xi) - N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi)\}\right)\right) = \exp(O\left(\tau_N N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{d^2}-\frac{1}{4d}}\right))$$

对任意 $s \in \mathbb{R}$, 令 $\tau = s\tau_N$，令 $\tau = s\tau_N$, 在两边取对数并除以 τ_N^2 ，我们得到：

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &:= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{r_N^2}\log\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{N,\beta}}\left(\exp\left(\tau_N s\{\mathrm{Fluct}(\xi) - N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi)\}\right)\right)\\ &= \ell^4\beta\frac{3s^2}{2\mathsf{c}_\mathsf{d}}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2 =: s^2 r(\xi)\end{aligned}$$

其中
$$r(\xi) := \ell^4\beta\frac{3}{2\mathsf{c}_\mathsf{d}}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\xi|^2$$

$\Lambda(s)$ 的 Fenchel-Legendre 变换是：

$$J(x) := \frac{x^2}{r(\xi)}$$

应用引理4.3.8，我们可以得到 $\frac{\ell^2\beta}{\tau_N}(\mathrm{Fluct}(\xi) - N^{1-\frac{2}{d}}m(\xi))$ 的大偏差原理。

参考文献

[1] O. Z. Amir Dembo. *Large Deviations Techniques and Applications.* Springer Berlin, Heidelberg, 2009.

[2] S. Armstrong and S. Serfaty. Thermal approximation of the equilibrium measure and obstacle problem, 2020.

[3] S. Armstrong and S. Serfaty. Local laws and rigidity for coulomb gases at any temperature, 2021.

[4] G. Cardoso, J.-M. Stéphan, and A. G. Abanov. The boundary density profile of a coulomb droplet. freezing at the edge. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(1):015002, dec 2020.

[5] J. M. Fuqing Gao. Moderate deviations for linear eigenvalue statistics of β-ensembles. *Random Matrices: Theory and Applications*, 11(2):2250017, 2022.

[6] K. Johansson. On fluctuations of eigenvalues of random hermitian matrices. *Duke Math. J.*, 91(1):151–204, 1998.

[7] G. Lambert, M. Ledoux, and C. Webb. Quantitative normal approximation of linear statistics of β-ensembles, 2019.

[8] T. Leblé and S. Serfaty. Large deviation principle for empirical fields of log and riesz gases, 2017.

[9] T. Leblé and S. Serfaty. Fluctuations of two-dimensional coulomb gases, 2018.

[10] S. Serfaty. Coulomb gases and ginzburg-landau vortices, 2015.

[11] S. Serfaty. Gaussian fluctuations and free energy expansion for coulomb gases at any temperature, 2022.

致　　谢

IN PROGRESS...